

تصحيح الامتحان الأول في مقياس التحليل + نقاط الامتحان

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي - سكيكدة -

المستوى: IPEST

المدة: ساعة ونصف

الإختبار الأول في مادة التحليل

التمرين الأول: 08 نقاط

لتكن المجموعة A المعرفة كيلي: $A = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{2n + 1}, n \in \mathbb{N} \right\}$

1. بين أن المجموعة A محدودة. C4
2. عين $\inf(A)$ ، هل $\min(A)$ موجود؟ علل. C2
3. عين $\sup(A)$ ، هل $\max(A)$ موجود؟ علل. C2

التمرين الثاني: 06 نقاط

بين بإستعمال التعريف نهاية المتتاليات التالية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n - 10} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$$

C2 C2 C2

التمرين الثالث: 06 نقاط

1. حدد طبيعة السلاسل التالية:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{7n-1} \right)^{5n-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n!)^5}$$

2. بين أن السلسلة التالية متقاربة وأحسب مجموعها. C2

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3}{n!}$$

C2

ملاحظة: معاينة الأوراق تكون في حصة الأعمال
الموجهة لكل فوج يومي 20، 21، 22 / 03 / 2022

تصحيح الامتحان 01 في مقياس التحليل

التمرين 01 : (8 نقاط)

$$A = \left\{ \frac{n+(-1)^n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

أ) إثبت أن المجموعة A هي مجموعة محدودة

لدينا: $A = \left\{ \frac{n+(-1)^n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\} = \underbrace{\left\{ \frac{2n+1}{4n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}}_{B} \cup \underbrace{\left\{ \frac{2n}{4n+3}, n \in \mathbb{N} \right\}}_{C}$

(أ) ضميها B ضميها C

$$A = B \cup C$$

لدينا: $B = \left\{ \frac{2n+1}{4n+1}, n \in \mathbb{N} \right\} \stackrel{(أ)}{=} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4n+1} \right), n \in \mathbb{N} \right\}$

$C = \left\{ \frac{2n}{4n+3}, n \in \mathbb{N} \right\} \stackrel{(أ)}{=} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{4n+3} \right), n \in \mathbb{N} \right\}$

ومن جهة أخرى نجد بعد الحصر أن:

$$\begin{cases} \forall x \in B: \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ \forall x \in C: 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

(أ) (0, 5 \times 2)

نلاحظ أن: $1 \in B$ (من أجل $n=0$) وحاصل التعلل $\sup(B)$

$\sup(B) = \max(B) = 1$ ($\forall x \in B: x \leq 1$) ومنه:

بقي أن نبرهن أن $\inf(B) = \frac{1}{2}$ أي نرهن أن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in B, x_\varepsilon < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$x_\varepsilon \in B \Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: x_\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{8n_\varepsilon+2}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \frac{1}{2} + \frac{1}{8n_\varepsilon+2} < \frac{1}{2} + \varepsilon \quad (أ) = (0, 25 + 0, 75)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: 8n_\varepsilon+2 > \frac{1}{\varepsilon}$$

كيفي أخذ: $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{8\varepsilon} - \frac{1}{4} \right] + 1$

من جهة أخرى نلاحظ أن 0 حاد من الأسفل لـ C
 (من أجل $n=0$) $0 \in C$ ومنه : $\inf(C) = \min(C) = 0$

بقي لنا أن نبرهن أن : $\sup(C) = \frac{1}{2}$ ، أي نبرهن أن :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in C : \frac{1}{2} - \varepsilon < x_\varepsilon$$

$$x_\varepsilon \in C \Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : x_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{3}{8n_\varepsilon + 6}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{2} - \frac{3}{8n_\varepsilon + 6}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : 8n_\varepsilon + 6 > \frac{3}{\varepsilon}$$

$$(c1) = (0, 25+0, 75)$$

$$\boxed{n_\varepsilon = \left\lceil \frac{3}{8\varepsilon} - \frac{3}{4} \right\rceil + 1}$$

يكفي أخذ :

$$\sup(B) = 1 = \max(B)$$

$$\inf(B) = \frac{1}{2}$$

$$\sup(C) = \frac{1}{2}$$

$$\inf(C) = 0 = \min(C)$$

(c1)

$$\sup(A) = \max\{\sup(B), \sup(C)\} = \max\{1, \frac{1}{2}\} = 1 = \max(A), (n=0)$$

$$\inf(A) = \min\{\inf(B), \inf(C)\} = \min\{\frac{1}{2}, 0\} = 0 = \min(A), (n=1)$$

التمرين 09 : (6 نقاط)

إثبات باستخدام التعريف نهاية المتتاليات التالية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1 \quad (c2)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right| = \left| \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right| = \frac{1 + \frac{1}{n} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\boxed{n_0 = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1}$$

يكفي ذلك أخذ :

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n-10} = +\infty \iff$$

(C2)

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n: (n > N \Rightarrow \left| \frac{n^2+1}{n-10} \right| > A)$$

$$\left| \frac{n^2+1}{n-10} \right| = \frac{n^2+1}{n-10} \quad (n > N > 10) \text{ لدينا: } A > 0 \text{ كيفي،}$$

$$n^2+1 \geq n^2 \Rightarrow \frac{n^2+1}{n-10} \geq \frac{n^2}{n-10} > \frac{n^2}{n} = n \quad (n-10 < n \text{ لأن})$$

$$N = \text{Max}(M, [A]+1) \text{ يلقي أخذ:}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{n} = 0 \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}: (n > N \Rightarrow |\sin \frac{1}{n} - 0| < \varepsilon)$$

ليكن $\varepsilon < 0$ كيفي، نعلم أن الدالة $\sin$ ليست موجبة على كل $\mathbb{R}$

لكن مثلاً هي موجبة على $[\frac{\pi}{\varepsilon}, \frac{\pi}{\varepsilon} + 1]$ لأن: $0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \frac{\pi}{\varepsilon}$

$$|\sin \frac{1}{n}| = \sin \frac{1}{n} \quad \text{وصت (C2)}$$

$$\sin x \leq x, \quad x \geq 0 \quad \text{وصت جهة أخرى:}$$

$$\sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\left(\frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n \right) \quad \text{وصت}$$

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$$

يلقي أخذ:

التمرين 03: (6 نقاط)

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{7n-1} \right)^{5n-1}$$

السلسلة التالفة:

أ) تحديد طبيعة السلسلة
ب) طبقاً معيار كوشي

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{n}{7n-1} \right)^{5n-1} \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{7n-1} \right)^{\frac{5n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{7n-1} \right)^{5 - \frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{7n-1} \right)^5 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{7n-1} \right)^{-\frac{1}{n}}$$

$$= \left(\frac{1}{7}\right)^5 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{7}\right)^5 < 1$$

ومن ثم: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{7n-1}\right)^{5n-1}$ هي سلسلة متقاربة، δ معيار كوشي.

نطبق معيار دالمبار.

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n!)^5}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^5} \cdot \frac{(n!)^5}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{(n+1)^4}$$

$$(C2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{(n+1)^4} = e \cdot 0 = 0$$

ومن ثم: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n!)^5}$ هي سلسلة متقاربة حسب معيار دالمبار.

(2) لإثبات أن السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3}{n!}$ متقاربة، وحساب مجموعها.

(أ) إثبات أن السلسلة متقاربة؟ لنطبق معيار دالمبار.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+5}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+5}{(n+1)(2n+3)} = 0 < 1$$

ومن ثم فالسلسلة متقاربة، دالمبار (C1)

حساب المجموع:

$$\frac{2n+3}{n!} = \frac{2n}{n!} + \frac{3}{n!} = \frac{2}{(n-1)!} + \frac{3}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3}{n!} = 3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{n!} = 3 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

$$= 3 + 2e + 3\left(e - \frac{1}{0!}\right)$$

$$= 3 + 2e + 3e - 3$$

$$= 5e$$

(C1)